УДК 514.75(08)

С. А. Ишанов, С. В. Клевцур, А. И. Кожурова, К. С. Латышев, В. Н. Худенко

ЦИКЛИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ «α – β» ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА. ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

Рассмотрены разностные методы приближенного решения двумерного уравнения диффузии ионов со смешанными производными и первыми производными дивергентного вида. Проведены тестовые расчеты на модельной задаче с известным аналитическим решением. Показана работоспособность алгоритма и дана оценка скорости его сходимости.

Differences methods of the approximate solution of the two-dimensional equation of ions diffusion with the mixed derivatives and the first derivatives of a divergent look are considered. Test calculations on a modeling task with the known analytical decision are carried out. Operability of algorithm is shown and the estimation of speed of its convergence is given.

Ключевые слова: разностный метод, приближеное решение, уравнение с частными производными, «α – β» алгоритм, сходимость.

Key words: differences method, approximate solution, equation with private derivatives, «α – β» algorithm, convergence.

При постановке задачи глобального моделирования ионосферы в сферической географической системе координат в качестве граничных условий по одной или нескольким пространственным переменным могут быть использованы условия периодичности решений и коэффициентов исходной системы уравнений. Возникает необходимость в разработке численных алгоритмов, учитывающих такие особенности задачи.

Рассмотрим уравнения диффузии ионов O^+ и H^+, записанные в дивергентной форме в полярной системе координат:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(P_{rr}\frac{\partial N_i}{\partial r} + P_r N_i\right) + \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(P_{\lambda\lambda}\frac{\partial N_i}{\partial \lambda} + P_\lambda N_i\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial r}\left(P_{r\lambda} + \frac{\partial N_i}{\partial \lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(P_{\lambda r}\frac{\partial N_i}{\partial r}\right)_i - L_i N_i + Q_i,\end{aligned} \quad (1)$$

где N_i — концентрация ионов и скорость движения ионов O^+ и H^+ ($i = 1, 2$); Q_i, и L_i — скорость образования и коэффициент, характеризующий рекомбинационные процессы; t — время; r — координата вдоль радиуса-вектора; λ — полярный угол; $P_{rr}, ..., P_{\lambda r}$ — коэффициенты дифференциального оператора, относящиеся к иону сорта i. Выражения для этих коэффициентов приведены в работе [1].

Используя разностные схемы из [2—3], уравнение (1) может быть представлено в виде системы девятиточечных разностных уравнений

$$\Lambda y_{i,k} \equiv A_{i,k}y_{i-1,k-1} + B_{i,k}y_{i,k-1} + L_{i,k}y_{i+1,k-1} + K_{i,k}y_{i-1,k} - \\ - C_{i,k}y_{i,k} + E_{i,k}y_{i+1,k} + D_{i,k}y_{i-1,k+1} + V_{i,k}y_{i,k+1} = -F_{i,k}, \\ 2 \leqslant i \leqslant N_i - 1,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2}$$

Отметим, что коэффициенты и правая часть разностных уравнений (2) периодичны по индексу k с периодом N_k.

Одним из наиболее эффективных способов решения системы разностных уравнений (2) является итерационный «$\alpha - \beta$» алгоритм [3], который представляет собой двумерный вариант метода прогонки по двум пространственным координатам. Данный метод сохраняет устойчивость при резких и зачастую трудно предсказуемых изменениях коэффициентов разностных уравнений (2), не требует получения какой-либо априорной информации о границах спектра разностного оператора, что необходимо для эффективного применения итерационных других методов [4], и имеет высокую скорость сходимости.

В то же время «$\alpha - \beta$» итерационный метод не может быть использован непосредственно для решения двумерных разностных задач с периодическими краевыми условиями. В связи с этим был разработан модифицированный вариант этого алгоритма для решения периодических краевых задач.

Дополним систему разностных уравнений (2) периодическими граничными условиями:

$$y_{i,k} = a_k,\ y_{N_i,k} = b_k,\ i \leqslant k \leqslant N_k,\ a_k = a_{k+N_k},\ b_k = b_{k+N_k}. \tag{3}$$

В этом случае решение системы (2), если оно существует, тоже будет периодическим с периодом N_k, то есть

$$y_{i,k} = y_{i,k+N_k},\ 1 \leqslant i \leqslant N_i. \tag{4}$$

Поэтому достаточно найти решение $y_{i,k}$, например при $k = 1, 2, \ldots, N_i - 1$, учитывая, что $y_{i,1} = y_{i,N_k}$, $1 \leqslant i \leqslant N_i$.

Так же как и в работе [4], в которой рассмотрен одномерный случай, решение будем искать в виде линейной комбинации сеточных функций $x_{i,k}$ и $z_{i,k}$:

$$y_{i,k} = x_{i,k} + y_{i,1}z_{i,k},\ 1 \leqslant i \leqslant N_i,\ 1 \leqslant k \leqslant N_k. \tag{5}$$

Функцию $x_{i,k}$ определим как решение неоднородной системы разностных уравнений

$$\Lambda x_{i,k} = -F_{i,k},\ 2 \leqslant i \leqslant N_i - 1,\ 2 \leqslant k \leqslant N_k - 1 \tag{6}$$

с однородными условиями по периодичности

$$x_{i,1} = x_{i,N_k} = 0,\ x_{i,k} = d_k,\ x_{N_i,k} = b_k,\ 2 \leqslant i \leqslant N_i - 1,\ 1 \leqslant k \leqslant N_k - 1. \tag{7}$$

Функцию $z_{i,k}$ определим как решение однородной системы разностных уравнений

$$\Lambda z_{i,k} = 0,\ 2 \leqslant i \leqslant N_i - 1,\ 2 \leqslant k \leqslant N_k - 1 \tag{8}$$

с неоднородными условиями по периодичности

$$z_{i,1} = z_{i,N_k} = 1,\ z_{1,k} = z_{N_i,k} = 0,\ 2 \leqslant i \leqslant N_i - 1,\ 1 \leqslant k \leqslant N_k - 1. \tag{9}$$

Запишем граничные условия для системы (6) в общем виде, тогда с учетом (7) получим:

$$\begin{gathered}\varphi_{2,k}=0,\ \ \varphi_{i,2}=0,\ \ \varphi_{N_i-1,k}=0,\ \varphi_{i,N_i-1}=0,\\ \xi_{2,k}=a_k,\ \ \xi_{N_i-1,k}=b_k,\ \xi_{i,2}=0,\ \ \xi_{i,N_k-1}=0.\end{gathered} \tag{10}$$

Аналогично, для системы (8) с учетом (9) находим:

$$\begin{gathered}\varphi_{2,k}=0,\ \ \varphi_{N_i-1,k}=0,\ \varphi_{i,2}=0,\ \ \varphi_{i,N_i-1}=0\\ \xi_{2,k}=0,\ \ \xi_{N_i-1,k}=0,\ \xi_{i,2}=1,\ \ \ \ \xi_{i,N_k-1}=1.\end{gathered} \tag{11}$$

Пусть решение системы (6) — (7) удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{gathered}x_{i,k}=\alpha_{i+1,k}x_{i+1,k}+\beta_{i+1,k},\ x_{i,k}=\gamma_{i-1,k}x_{i-1,k}+d_{i-1,k},\\ x_{i,k}=\tilde{\alpha}_{i,k+1}x_{i,k+1}+\tilde{\beta}_{i,k+1},\ x_{i,k}=\tilde{\gamma}_{i,k-1}x_{i,k-1}+\tilde{d}_{i,k-1}.\end{gathered}$$

Для отыскания неизвестных прогоночных коэффициентов α, γ, β, d, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{d}$ применим «$\alpha-\beta$» итерационный алгоритм, сводящийся к решению восьми нелинейных алгебраических уравнений для каждого узла разностной сетки [5]. Определив пару значений прогоночных коэффициентов, легко найти решение задачи (6) — (7). Аналогично определяется решение задачи (8) — (9).

Отметим, что прогоночные коэффициенты α, γ, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}$ для задачи (8) — (9) рассчитываются по тем же формулам, что и в задаче (6) — (7), и при тех же граничных условиях (10) — (11). Таким образом, общее число «$\alpha-\beta$» уравнений для прогоночных коэффициентов в двух данных задачах сокращается до двенадцати.

Легко показать, что решение $y_{i,k}$, определенное по формуле (5), удовлетворяет исходной задаче (2) — (4) во всех узлах разностной сетки, кроме узлов с номером $k=1$. Определим решение $y_{i,k}$ ($1 \leqslant i \leqslant N_i$), для этого подставим решение (4) в уравнение (2) при $k=1$ и приведем полученное выражение к трехточечному виду относительно $y_{i,1}$:

$$\tilde{A}_{i,1}y_{i-1,1}-\tilde{C}_{i,1}y_{i,1}+\tilde{B}_{i,1}y_{i+1,1}=-\tilde{F}_{i,1}, \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{A}_{i,1}=K_{i,1}+A_{i,1}z_{i-1,N_k-1}+D_{i,1}z_{i-1,2},\ \tilde{C}_{i,1}=C_{i,1}-B_{i,1}z_{i,N_k-1}-V_{i,1}z_{i,2},\\ \tilde{B}_{i,1}=E_{i,1}+L_{i,1}z_{i+1,N_k-1}+Y_{i,1}z_{i+1,2},\\ \tilde{F}_{i,1}=F_{i,1}+A_{i,1}x_{i-1,N_k-1}+B_{i,1}x_{i,N_k-1}+L_{i,1}x_{i+1,N_k-1}+\\ +D_{i,1}x_{i-1,2}+V_{i,1}x_{i-1,2}+Y_{i,1}x_{i+1,2}.\end{gathered}$$

Видно, что коэффициенты и правая часть трехточечного уравнения (12) могут быть вычислены по ранее найденным значениям сеточных функций $x_{i,k}$ и $z_{i,k}$. Так как уравнение (12) одномерно, то для отыскания его решения можно воспользоваться формулами обыкновенной прогонки [4] с граничными условиями

$$y_{i,1}=a_1,\ y_{N_i,1}=b_1. \tag{13}$$

Таким образом, циклический вариант «α—β» итерационного алгоритма состоит из трех этапов:

1) методом «α—β» итераций находим значения сеточных функций $x_{i,k}$ и $z_{i,k}$ во всех внутренних углах сеточной области;

2) находим значения функции $y_{i,1}$ $(1 \leqslant i \leqslant N_i)$, решая одномерной прогонкой уравнение (12) с граничными условиями (13);

3) по найденным значениям сеточных функций $x_{i,k}$ и $z_{i,k}$ находим значения $y_{i,k}$ во всех внутренних узлах сеточной области по (5).

Для проверки работоспособности и оценки скорости сходимости модифицированного алгоритма рассмотрим тестовую задачу с известным аналитическим решением для эллиптического уравнения, записанного в полярной системе координат. В декартовой системе координат область определения решения — кольцо с радиусами R_0 и R_1. В полярной системе координат области соответствует область $\overline{G} = \{R_0 < r < R_1, l_1 < \lambda < l_2, l_1 > 0, l_2 - l_1 = 2\pi\}$. Найдем решение уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} = f(r,\lambda). \tag{14}$$

Решение является периодическим по λ с периодам 2π и удовлетворяет на границе области $\overline{G}$ краевым условиям первого рода:

$$u(r,\lambda) = d(\lambda),\ r = R_0,\ \lambda \in [l_1, l_2),\ u(r,\lambda) = b(\lambda),\ r = R_1,\ \lambda \in [l_1, l_2).$$

Правая часть $f(r, \lambda)$ подбиралась так, чтобы функция

$$u(r,\lambda) = (r - R_0)(r - R_1)\sin\lambda + C,$$

где C — некоторая константа, удовлетворяла уравнению (14), при этом $a = b = c$. Постоянная C выбиралась в пределах $0 \div 10^5$. Разностная аппроксимация уравнения (14) проводилась по схемам из [2—3].

Вычислительные эксперименты показали хорошее совпадение численного и точного решений. Погрешность расчетов не превосходила 10 %. В таблице дана зависимость числа «β» итераций, необходимых для достижения точности $\varepsilon = 10^{-3}$, от числа узлов разностной сетки (число «α» итераций во всех расчетах не превосходила 4). Здесь N_i — количество узлов по r, N_k — по λ.

Зависимость числа «β» итераций от числа узлов разностной сетки

Число узлов									
	N_i	10	10	20	20	30	30	30	50
	N_k	19	73	19	37	19	37	73	73
Число «β» итераций по $x_{i,k}$		15	29	22	39	23	53	109	67
Суммарное число «β» итераций		26	55	37	70	40	91	192	344

Суммарное число «β» итераций получается сложением числа «β» итераций, затраченных на вычисление прогоночных коэффициентов $x_{i,k}$ и $z_{i,k}$. Все столбцы таблицы 1, кроме последнего, где $c = 10^5$, соответствуют $c = 0$. Анализ полученных результатов показывает, что скорость сходимости циклического «α – β» итерационного метода остается достаточно высокой. При этом не требуется ни самосопряженности разностного оператора, ни априорной информации о его спектре.

Скорость сходимости асимптотически уменьшается с ростом числа узлов сетки пропорционально $I / N_i \cdot N_k$, как и в исходном алгоритме. Циклический алгоритм решения двумерных периодических задач ионосферного моделирования не является жестко связанным с той или иной конкретной методикой расчета уравнений и может быть использован практически без изменений в целом ряде программных комплексов, в которых для расчета используются четырехугольные сетки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проектам №11-01-00098а и №11-01-00558а.

Список литературы

1. *Фаткуллин М. Н., Клевцур С. В., Латышев К. С.* Оператор переноса в уравнении непрерывности для ионов в трехмерно-неоднородной области F (средние и высокие широты) // Геомагнетизм и аэрономия. 1984. Т. 24, №6. С. 906—910.

2. *Ишанов С. А., Клевцур С. В, Латышев К. С.* Алгоритм «α—β» итераций в задачах моделирования ионосферной плазмы // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, №1. С. 33—45.

3. *Ишанов С. А., Клевцур С. В.* Математическое моделирование ионосферы с учетом ее трехмерной неоднородности // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. 2010. №4. С. 152—158.

4. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

5. *Четверушкин Б. Н.* Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М., 1985.

Об авторах

Сергей Александрович Ишанов — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

E-mail: sergey.ishanov@ya.ru.

Сергей Владимирович Клевцур — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

Алла Ивановна Кожурова — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

Константин Сергеевич Латышев — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

Худенко Владимир Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

Authors

Dr Sergey Ishanov — professor, I. Kant Baltic Federal University.

E-mail: sergey.ishanov@ya.ru.

Dr Sergey Klevtsur — assistant professor, I. Kant Baltic Federal University.

Alla Kozhurova — high instructor, I. Kant Baltic Federal University.

Dr Konstantin Latyshev — professor, I. Kant Baltic Federal University.

Dr Vladimir Khudenko — assistant professor, I. Kant Baltic Federal University.